



Серия №13. Суммы квадратов. Конструктивы

8 июля

1. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде $a^2 + b^2 + c^2 - d^2$, где a, b, c, d – натуральные числа.
2. Докажите, что для любых целых a и b разной четности найдется такое c , что $c + ab$, $c + a$, $c + b$ – точные квадраты.
3. Для различных натуральных чисел a, b, c, d известно, что $abcd$ – точный квадрат. Докажите, что $a^4 + b^4 + c^4 + d^4$ можно представить в виде суммы пяти точных квадратов натуральных чисел.
4. Число n является суммой трех квадратов натуральных чисел. Докажите, что число n^2 тоже является суммой трех квадратов натуральных чисел.
5. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что n является суммой двух квадратов целых чисел, а числа $n - 1$ и $n + 1$ – не являются.
6. Докажите, что существует бесконечно много троек последовательных натуральных чисел таких, что каждое из них является суммой двух квадратов натуральных чисел.
7. Докажите, что существует бесконечно много четверок взаимно простых в совокупности натуральных чисел a, b, c, d таких, что $ab + bc + ac$, $ab + bd + ad$, $ac + ad + cd$, $bc + bd + cd$ – точные квадраты.